Parcial. Tercera fecha: 4 de marzo de 2021

Apellido y nombres:

Nro Padrón:

1. Sea
$$A = \int_C \frac{\sqrt{z+i}}{(z+1+i)^2} dz$$
siendo C una circunferencia de centro en $z=-1$ y radio $11/10$. Defina una rama de la raíz cuadrada de forma que A esté bien definida, y dé los valores $Re(A)$ e $Im(A)$.

2. Dada la función
$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2} + \frac{1}{z}$$
   (I) Halle la serie de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z+1)^k$ de f tal que la serie numérica $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2^k$ converja. Indique los coeficientes c_{-2}, c_{-1}, c_0 y c_1.

   (II) Indique si las siguientes series numéricas son convergentes, y en caso afirmativo, halle el valor al que convergen (los coeficientes c_k son los de la serie del inciso anterior)

   1) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$

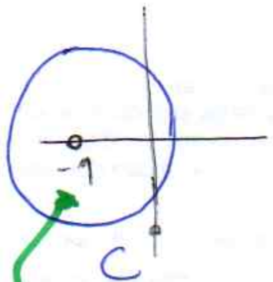
   2) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, c_k (-2)^k$

3. Determine los puntos donde la transformación $T(z) = Log(z^2-1)$ no es conforme, y halle la imagen de $D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0, Im(z) < 0\}$ a través de T, indicando además cómo se transforma la frontera de D.

4. Halle y clasifique las singularidades de la función
$$g(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-\pi i)^2 \cosh(z)}$$
y calcule la integral de $g(z)$ sobre una circunferencia de radio 2 centrada en $3i$.

Parcial 4/3/21
Resolución

①



$-1-i \in RI(C)$

$\sqrt{z+i}$: pto ramif : $z_0=-i$

Elijo corte: $\{z : z = t-i, t \geq 0\}$

$\sqrt{z+i} = \sqrt{|z+i|} \cdot e^{i\frac{\arg(z+i)}{2}}$ con $0 < \arg(z-i) < 2\pi$

$$\int \frac{\sqrt{z+i}}{(z+1+i)^2}\, dz \underset{\text{FICG}}{=} 2\pi i \left(\sqrt{z+i}\right)'\Big|_{z=-1-i} =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{2}(z+i)^{-1/2}\Big|_{z=-1-i} = \pi i\,(-1)^{-1/2} = \pi i\, e^{-\frac{\pi i}{2}}$$

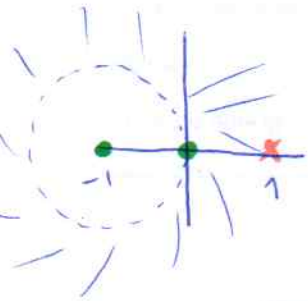
$$= \pi i\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Re}\, A = \pi \\ \text{Im}\, A = 0 \end{array}}$$

②. f no holom en $z=-1$ y en $z=0$

$\sum c_k 2^k$ es la serie $\sum c_k (z+1)^k$ evaluado en $z=1$

$\Rightarrow$ DSL centrado en -1, que converja para $z=1$



$$e^z = e^{z+1} \cdot e^{-1} = e^{-1}\sum_0 \frac{(z+1)^k}{k!} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!}(z+1)^k \quad \forall z$$

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!}(z+1)^{k-2} \qquad |z+1|>0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_0 \left(\frac{1}{z+1}\right)^k = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$$

$|z+1|>1$

$$\text{Serie: } \sum_0^{\infty} \frac{e^{-1}}{k!}(z+1)^{k-2} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \frac{e^{-1}}{(z+1)^2} + \frac{e^{-1}}{(z+1)} + \frac{e^{-1}}{2!} + \frac{e^{-1}}{3!}(z+1) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} + \dots$$

$$= \dots + \frac{1}{(z+1)^3} + (e^{-1}+1)\frac{1}{(z+1)^2} + (e^{-1}+1)\frac{1}{z+1} + \frac{e^{-1}}{2!} + \frac{e^{-1}}{3!}(z+1) + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_{-2} &= e^{-1}+1 \\ C_{-1} &= e^{-1}+1 \\ C_0 &= \frac{e^{-1}}{2!} \\ C_1 &= \frac{e^{-1}}{3!} \end{aligned}}$$

(II)

1) $\sum c_k$ es la serie evaluada en $z=0$ $\rightarrow$ no converge

2) $\sum k\, c_k (-2)^k$ es la serie de las derivadas término a término, evaluada en $z=-3 \in$ reg. conv., por 2.

$$f(z) = \sum c_k (z+1)^k$$

$$f'(z) = \sum c_k \cdot k (z+1)^{k-1}$$

$$f'(-3) = \sum c_k\, k (-2)^{k-1} = -\frac{1}{2} \sum c_k\, k \cdot (-2)^k$$

$$\Rightarrow \sum c_k\, k (-2)^k = 2 f'(-3) \quad \rightarrow \text{(derivar y evaluar)}$$

(3). $T(z)$ no es conforme donde no es holomorfa y donde $T'(z)=0$.

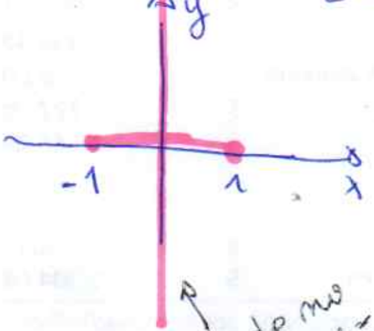
no holo: z: z^2-1 es real negativo o cero.

$$x^2-y^2-1+2xyi = t \quad \text{con } t \leq 0$$

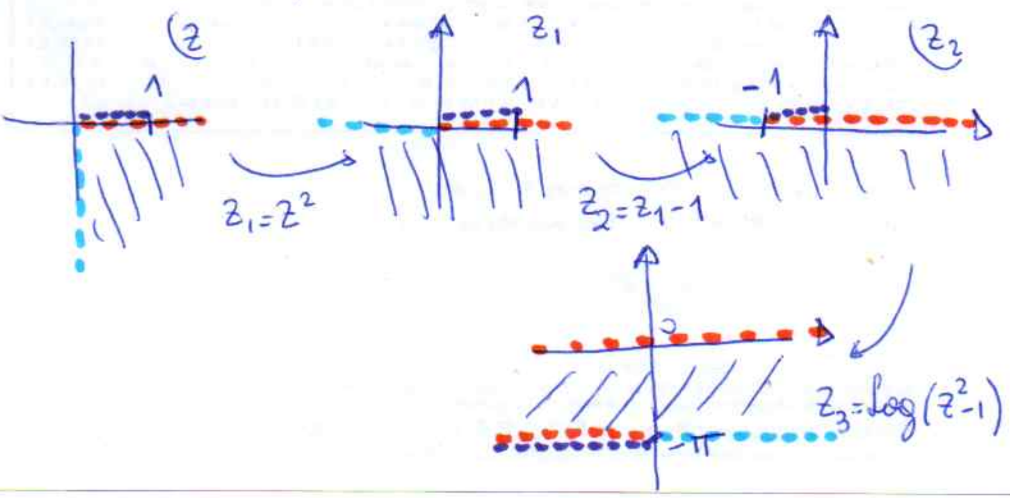
$$\begin{cases} x^2-y^2-1 \leq 0 \\ xy = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y^2-1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

y $T'(z) = \frac{1}{z^2-1} \cdot 2z = 0 \iff z=0$

↳ pero aquí no es holo.



ptos de no holomorfía

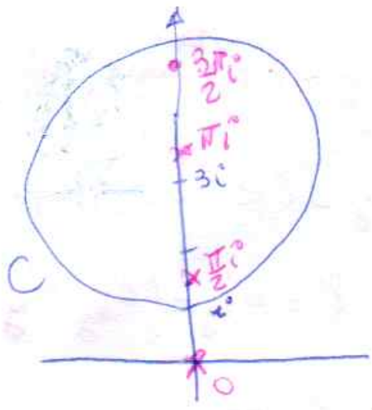


④ Sing: $z=0$ → esencial

$z=\pi i$ → polo orden 2

$z: \cosh(z)=0 \iff z=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)i,\ k\in\mathbb{Z}$

polos orden 1.



$$\int_C g(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(g, \tfrac{\pi}{2}i) + \operatorname{Res}(g(z), \pi i) + \operatorname{Res}(g, \tfrac{3\pi}{2}i)\right)$$

$$\operatorname{Res}(g, \tfrac{\pi}{2}i) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i} (z-\pi/2 i)\, g(z)$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}i} \frac{(z-\frac{\pi}{2}i)}{\cosh(z)} \frac{e^{1/z}}{(z-\pi i)^2} =$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \frac{z-\pi/2 i}{\cosh(z)} \cdot \lim \frac{e^{1/z}}{(z-\pi i)^2}$$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi i}{2}} \frac{1}{\operatorname{senh}(z)} \cdot \frac{e^{-\frac{2i}{\pi}}}{-\frac{\pi^2}{4}} = \frac{-1}{i}\frac{e^{-\frac{2i}{\pi}}}{\pi^2}\cdot 4$$

Semejantemente: $\operatorname{Res}(g, \frac{3\pi}{2}i) = \frac{-1}{-i}\frac{e^{-\frac{2i}{3\pi}}}{\pi^2}\cdot 4$

$$\operatorname{Res}(g, \pi i) = \lim_{z\to\pi i} \left(\frac{e^{1/z}}{\cosh(z)}\right)' = A$$

$$\int_C g(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{4i}{\pi^2}e^{-\frac{2i}{\pi}} - \frac{4i}{\pi^2}e^{-\frac{2i}{3\pi}} + A\right)$$